מועד ב', סמסטר חורף תש"ף - אלגברה 1/מ, 104016
5.3.20

פתרונות מלאים

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
בשאלות 4-8 יש **לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה**. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

שאלה מס' 1 : (24 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a+2b+c+3d & a+b+2c+2d \\ 0 & b-c+d \end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T כך שבכל פולינום בבסיס זה המקדם של x^2 שווה 3.

ב. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (6 נק') הוכיחו כי כל מטריצה ב $\operatorname{Im}T$ (כאשר T הוא האופרטור הנתון) היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ד. (6 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענה הבאה : אם A ו- B הן שתי מטריצות לכסינות ב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ אז גם $A+B$ היא מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

פתרון שאלה מספר 1:

א. נמצא בסיס ומימד לגרעין :

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a+2b+c+3d & a+b+2c+2d \\ 0 & b-c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b+c+3d=0 \\ a+b+2c+2d=0 \\ b-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a+3c+d=0 \\ -b+c-d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3c-d \\ b=c-d \end{cases}$$

$$KerT=\left\{(-3c-d)+(c-d)x+cx^2+dx^3 \,\middle|\, c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$(-3c-d)+(c-d)x+cx^2+dx^3=c(-3+x+x^2)+d(-1-x+x^3) \quad \Rightarrow$$

$$B_{KerT}=\left\{-3+x+x^2\ ,\ -1-x+x^3\right\}$$

קיבלנו שני פולינומים בלתי תלויים ליניארית כי לא פרופורציונאליים ולכן מהווים בסיס לגרעין ו $\dim KerT=2$.

עתה נמצא בסיס המקיים את הדרישה, שבכל פולינום בבסיס זה המקדם של x^2 שווה 3. נשים את המקדמים של אברי הבסיס במטריצה ונבצע פעולות אלמנטריות לקבלת בסיס כנדרש. ידוע שפעולות אלמנטריות לא משנות את המרחב הנפרש ואת הדרגה ולכן נקבל בסיס אחר לגרעין (כי עדין הקבוצה פורשת והמימד לא ישתנה) ובסיס זה, יקיים את הדרישה :

$$B_{KerT}=\left\{-3+x+x^2\ ,\ -1-x+x^3\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1\to 3R_1}{\to} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2\to R_2+R_1}{\to} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 & 0 \\ -10 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{KerT}=\left\{-9+3x+3x^2\ ,\ -10+2x+3x^2+x^3\right\}$$

ב. בסיס ומימד לתמונה: לפי משפט המימדים השני נקבל:
$\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim KerT = 4-2=2$. מכאן כי כל שני פורשים או כל שנים בתמונה שהם בלתי תלויים ליניארית יהיו בסיס לתמונה. נוציא סקלרים מהאיבר הכללי לקבלת קבוצה פורשת ונבחר שניים בלתי תלויים שיהוו בסיס לתמונה:

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a+2b+c+3d & a+b+2c+2d \\ 0 & b-c+d \end{pmatrix}=$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{\operatorname{Im}T}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ג. ניקח איבר כללי לתמונה ונראה שתמיד מתקבלת מטריצה לכסינה: איבר כללי בתמונה הוא צרוף ליניארי של איברי הבסיס שקיבלנו: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$: $\begin{pmatrix} a+2b & a+b \\ 0 & b \end{pmatrix}$. לכל a,b זו מטריצה משולשת ולכן הע״ע שלה הם איברי האלכסון.
אם אברי האלכסון שונים זה מזה אז נקבל שני ע״ע שונים למטריצה מסדר 2x2 ולכן לכסינה כלומר אם: $a+2b\neq b$ או $a\neq -b$ המטריצות בתמונה כולן לכסינות.
אם $a=-b$. נקבל שהמטריצה בתמונה היא מהצורה $\begin{pmatrix} a+2b & a+b \\ 0 & b \end{pmatrix}\underset{a=-b}{=}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ שזו מטריצה אלכסונית ולכן לכסינה. לכן לכל ערך של a,b המטריצות בתמונה לכסינות.

ד. טענה זו לא נכונה. אומנם כאשר לקחנו בסעיף ג׳ שתי מטריצות מהתמונה הן היו לכסינות וגם הסכום שלהן היה מטריצה לכסינה אבל דבר זה לא נכון תמיד. למשל, ניקח את שתי המטריצות הבאות: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שתיהן לכסינות כי משולשות עליונות מסדר 2x2 עם שני ע״ע שונים (איברי האלכסון) אבל הסכום שלהן:
$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא מטריצה שלה יש ע״ע 1 מריבוי אלגברי 2. נחשב ריבוי גיאומטרי: $n-rank\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 0-1 \end{pmatrix}=2-rank\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=2-1=1$.
קיבלנו ריבוי גיאומטרי של 1 ששונה מריבוי אלגברי שלו ולכן $A+B$ לא לכסינה.

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהי $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T(A)=A\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}.$$

א. (3 נק') מצאו את $[T]_E$, המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי הסדור של V :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

ב. (9 נק') מצאו בסיס סדור S של V כך ש- $[T]_S$ אלכסונית. מצאו גם את $[T]_S$.

ג. (4 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה : $V=KerT\oplus \operatorname{Im}T$ (כאשר T הוא האופרטור הנתון).

ד. (4 נק') נסמן ב- C את המטריצה מסעיף א' $\left(C=[T]_E\right)$. מצאו $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ כך ש $C^5=\alpha C^3+\beta C^2+\gamma C$.

<u>פתרון שאלה מספר 2:</u>

א. נמצא איבר כללי לתמונה ונבנה ממנו מטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי של V :

$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&a+2b\\c+2d&c+2d\end{pmatrix}$ לכן נקבל :

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

ב. יש למצוא בסיס של וקטורים עצמיים :

$$\left|\lambda I-[T]_E\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0&0\\-1&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\underset{\substack{C_1\to C_1+C_2\\C_3\to C_3+C_4}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0&0\\\lambda-3&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-3&-2\\0&0&\lambda-3&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_4\to R_4-R_3}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-3&-2\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)^2$$

לכן ערכים עצמיים : $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$. כל אחד מריבוי אלגברי 2.

אפשרות אחרת : ניתן להבחין שדרגת המטריצה היא 2 (שורות 1,2 ו 3,4 הן זהות) לכן $\lambda_1=0$ הוא ערך עצמי מריבוי גיאומטרי $4-rank(A-0\cdot I)=4-rank(A)=4-2=2$

לכן ריבוי אלגברי של 0 לפחות 2. סכום כל שורה שווה 3 לכן 3 הוא ערך עצמי. מצאנו כבר לפחות 3 ערכים עצמיים. את הרביעי והאחרון נמצא לפי העיקבה :

$trac(A)=1+2+1+2=6=0+0+3+\lambda$ ולכן הערך העצמי האחרון הוא גם 3 כלומר 3 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

נמצא וקטורים עצמיים. עבור $\lambda_1 = 0$. יש לפתור $\left([T]_E - 0\cdot I\right)\overline{x} = [T]_E\,\overline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{\lambda_1=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור $\lambda_2 = 3$. יש לפתור $\left([T]_E - 3I\right)\overline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} b & b \\ d & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{\lambda_2=3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכל ערך עצמי קיבלנו כי ריבוי אלגברי שווה ריבוי גיאומטרי שווה ל- 2 ולכן האופרטור לכסין ובנוסף, בסיס סדור S המורכב כולו מוקטורים עצמיים הוא :

$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ומתקיים : $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ג. יש להוכיח כי $V = KerT \oplus \operatorname{Im}T$ כלומר יש להוכיח $KerT \cap \operatorname{Im}T = \{0\}$ וכן : $V = KerT + \operatorname{Im}T$. בסיס של $KerT$ הוא בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1 = 0$ כלומר איבר כללי לגרעין הוא : $\begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix}$. איבר כללי לתמונה הוא איבר כללי של המרחב העצמי של $\lambda_2 = 3$ (כי אם נפעיל T על איברי הבסיס S מסעיף ב', נקבל שתי תמונות שהן 0 ושתי תמונות שהן הוקטורים העצמיים המתאימים ל $\lambda_2 = 3$ וכולם מהווים קבוצה פורשת לתמונה. נשמיט את האפסים ונקבל כי בסיס למרחב העצמי של $\lambda_2 = 3$ הוא בסיס לתמונה). ניקח איבר כללי לתמונה (צירוף ליניארי של אברי הבסיס למרחב העצמי של $\lambda_2 = 3$ שמצאנו קודם) ונאלץ עליו את תנאי הגרעין :

קיבלנו כי $\begin{pmatrix} b & b \\ d & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b=-2b \\ d=-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow KerT \cap \operatorname{Im}T = \{0\}$.

החיתוך הוא $\{0\}$ לכן הסכום הוא סכום ישר.

עתה נראה כי $V = KerT + \operatorname{Im}T$ ומשניהם יחד ינבע $V = KerT \oplus \operatorname{Im}T$.
מאחר ומתקיים $KerT + \operatorname{Im}T \subset V$ נותר להוכיח ששני המרחבים בעלי אותו מימד ואז תת מרחב מאותו מימד שווה למרחב עצמו. נשתמש במשפט המימדים הראשון, והתוצאות שכבר קיבלנו קודם:

$$\dim(KerT + \operatorname{Im}T) = \dim(KerT) + \dim(\operatorname{Im}T) - \dim(KerT \cap \operatorname{Im}T) = 2+2-0 = 4 = \dim V$$

קיבלנו שוויון מימדים ולכן $V = KerT + \operatorname{Im}T$ והחיתוך יצא $\{0\}$ לכן
$V = KerT \oplus \operatorname{Im}T$ כנדרש.

ד. נשתמש במשפט קיילי המילטון. ראינו שהפולינום האופייני של המטריצה C הוא:
$\lambda^2(\lambda-3)^2 = \lambda^2(\lambda^2-6\lambda+9) = \lambda^4-6\lambda^3+9\lambda^2$. נציב את C ונקבל 0:
$C^4-6C^3+9C^2=0$ לכן $C^4=6C^3-9C^2$. נכפול שני אגפים ב- C ונקבל:
$C^5=6C^4-9C^3$. נציב $C^4=6C^3-9C^2$ ונקבל:
$C^5=6(6C^3-9C^2)-9C^3=36C^3-54C^2-9C^3=27C^3-54C^2$.
קיבלנו $\alpha=27$, $\beta=-54$, $\gamma=0$

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') אם $A\in F^{n\times n}$ הפיכה, אזי $adj\left(adj(A)\right)=|A|^{n-2}\cdot A$.

טענה נכונה: לפי משפט: $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$. נממש את המשפט עבור המטריצה $adj(A)$ ונקבל: $adj(A)\cdot adj(adj(A))=|adj(A)|\cdot I$. נתון ש- A הפיכה ולכן נכפול את $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$ ב A^{-1} משמאל ונקבל $adj(A)=|A|\cdot A^{-1}$. בנוסף נקבל כי $|adj(A)|=\left||A|\cdot A^{-1}\right|=|A|^n\left|A^{-1}\right|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}$. נציב את שתי התוצאות הנ"ל בנוסחה, ונבודד את מה שביקשו:

$$adj(A)\cdot adj(adj(A))=|adj(A)|\cdot I$$

$$|A|\cdot A^{-1}\cdot adj(adj(A))=|A|^{n-1}\cdot I \qquad / \underbrace{\cdot A}_{left}\ ,\ \cdot|A|^{-1}$$

$$adj(adj(A))=|A|^{n-2}\cdot A$$

הוכחה אחרת: כאמור עבור מטריצה הפיכה מתקיים: $adj(A)=|A|\cdot A^{-1}$ (כלומר "$adj(A)$ זה הדטרמיננטה של A כפול ההופכית של A"). נציב במה שביקשו ונקבל:

$$adj(adj(A))=adj\left(|A|\cdot A^{-1}\right)=\left||A|\cdot A^{-1}\right|\cdot\left(|A|\cdot A^{-1}\right)^{-1}=\underbrace{|A|^n\cdot\left|A^{-1}\right|\left(|A|\right)^{-1}}_{|A|^{n-2}}\underbrace{\left(A^{-1}\right)^{-1}}_{A}=|A|^{n-2}A$$

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו W_1,W_2 שני תת מרחבים של V המקיימים:

$\dim W_1<\dim W_2$ וכן $\dim(W_1+W_2)=1+\dim(W_1\cap W_2)$;

אזי, $W_1=W_1\cap W_2$ וגם $W_2=W_1+W_2$.

טענה נכונה: נבחין כי: $W_1\cap W_2\subseteq W_1\ ,\ W_2\subseteq W_1+W_2$. בנוסף נתון כי $\dim W_1<\dim W_2$ ולכן: $\dim(W_1\cap W_2)\le\dim(W_1)<\dim(W_2)\le\dim(W_1+W_2)=1+\dim(W_1\cap W_2)$. קיבלנו כי $\dim(W_1)\ ,\ \dim(W_2)$ הם שני מספרים טבעיים (או 0) שונים, הנמצאים בין שני מספרים עוקבים $\dim(W_1\cap W_2)$ ו- $\dim(W_1\cap W_2)+1$ לכן בהכרח $\dim(W_1)=\dim(W_1\cap W_2)$ (המספר הקטן) ו- $\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)$ (המספר הגדול). לכן $W_1\cap W_2\subseteq W_1$ תת מרחב מאותו מימד לכן $W_1=W_1\cap W_2$ וגם $W_2\subseteq W_1+W_2$ תת מרחב מאותו מימד לכן $W_2=W_1+W_2$.

ג. (7 נק') יהיו V,U מרחבים וקטורים מעל לשדה F, ותהי $T:V\to U$ העתקה לינארית.

אם T חח"ע אז T על.

טענה לא נכונה: נבחר העתקה ליניארית: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י $T(a,b)=(a,b,0)$. זו העתקה ליניארית ידועה. היא חח"ע כי $T(a,b)=(0,0,0)=(a,b,0)$ גורר $a=0\ ,\ b=0$ כלומר $Ker T=\{0\}$ לכן חח"ע, אבל $\dim \operatorname{Im} T=\dim\mathbb{R}^2-\dim Ker T=2-0=2\neq\dim\mathbb{R}^3=3$ לכן T לא על. או פשוט: לווקטור $(0,0,1)$ ב- $\mathbb{R}^3$ אין מקור (כי T "מאפסת" את הרכיב השלישי) לכן לא בתמונה ולכן T לא על.

ד. (7 נק') אם A מטריצה ממשית ולכסינה, בעלת פולינום אופייני $f(\lambda)=\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3$;

אזי, $rank(A-I)=3$.

טענה נכונה: הפולינום האופייני של A הוא

$f(\lambda)=\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3=\lambda^3(\lambda^2-2\lambda+1)=\lambda^3(\lambda-1)^2$ והערכים העצמיים של A הם $\lambda_1=0$ מריבוי אלגברי 3 ו- $\lambda_2=1$ מריבוי אלגברי 2. נתון ש- A לכסינה לכן ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי לכל ערך עצמי, ובפרט ריבוי גיאומטרי של $\lambda_2=1$ הוא גם 2 כלומר:

$n-rank(A-1\cdot I)=2$. מאחר ומעלת הפולינום האופייני היא 5 נובע ש- A מסדר 5×5 כלומר $n=5$ ולכן: $5-rank(A-I)=2$ או $rank(A-I)=3$ כנדרש.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

נתונה המשוואה $\left(\overline{z}\right)^3=\frac{\left(1+i\right)^6}{\left(\overline{1+i}\right)^4}$; אזי, הטענה היחידה **שאיננה** נכונה היא :

א. למשוואה יש שורש אחד מדומה טהור מהצורה bi כאשר $0<b<\sqrt{2}$.

ב. למשוואה יש שני שורשים $z_1\,,\,z_2$ כך ש- $\mathrm{Re}(z_1)=-\mathrm{Re}(z_2)$.

ג. למשוואה יש שני שורשים $z_1\,,\,z_2$ כך ש- $\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)=-\sqrt[3]{2}$.

ד. למשוואה יש שני שורשים $z_1\,,\,z_2$ כך ש- $\arg(z_1\cdot z_2)=90^\circ$.

ה. למשוואה יש שני שורשים $z_1\,,\,z_2$ כך ש- $z_1\cdot z_2=\sqrt[3]{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

<u>פתרון שאלה מספר 4:</u>

נמצא תחילה את שורשי המשוואה :

$$\left(\overline{z}\right)^3=\frac{\left(1+i\right)^6}{\left(\overline{1+i}\right)^4}=\frac{\left(\sqrt{2}cis45^\circ\right)^6}{\left(\overline{\sqrt{2}cis45^\circ}\right)^4}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^6cis270^\circ}{\left(\sqrt{2}\right)^4cis(-45^\circ\cdot 4)}=\frac{8cis270^\circ}{4cis(-180^\circ)}=2cis(270^\circ+180^\circ)=2cis90^\circ$$

קיבלנו : $\left(\overline{z}\right)^3=2cis90^\circ$ או (נצמיד שני אגפים) : $z^3=2cis(-90^\circ)=2cis(270^\circ)$ לכן שורשי המשוואה הם (לפי נוסחת השורשים) : $z_j=\sqrt[3]{2}cis(90^\circ+120k)$ כלומר :

$$z_1=\sqrt[3]{2}cis90^\circ=\sqrt[3]{2}\cdot i$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}cis210^\circ=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$z_3=\sqrt[3]{2}cis330^\circ=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

את סעיף א' מקיים z_1 ; את סעיף ב' מקיימים z_2 ו- z_3 ; את סעיף ג' מקיימים z_2 ו- z_3 ; את סעיף ה' מקיימים z_1 ו- z_3 ; אין זוג שורשים שמקיימים את סעיף ד'.
סימון נכון : ד'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו T ו-S שתי קבוצות של וקטורים בV כך ש $0 \notin T$ וגם $0 \notin S$ אזי:

א. אם $T \cap S = \varnothing$ אז $span\{T\} \cap span\{S\} = \{0\}$.

ב. אם $T \cap S \neq \varnothing$ אז $span\{T\} \cap span\{S\} \neq \{0\}$.

ג. אם $span\{T\} \cap span\{S\} \neq \{0\}$ אז $T \cap S \neq \varnothing$.

ד. אם $T \cap S = \varnothing$ אז $V = span\{T\} \oplus span\{S\}$.

ה. אם $V = span\{T\} + span\{S\}$ אז $T \cup S$ בסיס של V.

<u>פתרון שאלה מספר 5:</u>

ניתן דוגמא נגדית לסעיפים הלא נכונים ונוכיח את הנכון:

א. **לא נכון**: $S = \{(2,0)\}$, $T = \{(1,0)\}$ אז $T \cap S = \varnothing$ אבל

$span\{T\} = span\{S\} = span\{(1,0)\} \neq \{0\}$.

ב. **נכון**: נתון ש $0 \notin T$ וגם $0 \notin S$ ולכן לא נוכל לקבל $T \cap S \neq \{0\}$ מה שהיה הופך את הטענה לשגויה. נוכיח: לפי הנתון ש- $T \cap S \neq \varnothing$, לכן קיים $0 \neq v \in V$ כך ש $v \in T \cap S$ כלומר ש $v \in T$ וגם $v \in S$. לפי משפט ספאן מכיל את הקבוצה הפורשת שלו ולכן $v \in span\{T\}$ וגם $v \in span\{S\}$ ולכן $v \in span\{T\} \cap span\{S\}$ אבל $v \neq 0$ ולכן $span\{T\} \cap span\{S\} \neq \{0\}$.

ג. **לא נכון**: אותה דוגמא כמו א'. נבחר: $S = \{(2,0)\}$, $T = \{(1,0)\}$. מתקיים

$span\{T\} \cap span\{S\} \neq \{0\}$ אבל $T \cap S = \varnothing$.

ד. **לא נכון**: אותה דוגמא כמו ב- א' כי $T \cap S = \varnothing$ אבל $\mathbb{R}^2 \neq span\{T\} \oplus span\{S\}$.

ה. **לא נכון**: נבחר למשל: $S = \{(0,1)\}$, $T = \{(1,0)\ ,\ (2,0)\}$ אז $\mathbb{R}^2 = span\{T\} + span\{S\}$

אבל $T \cup S = \{(1,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (0,1)\}$ לא בסיס של $\mathbb{R}^2$ כי הקבוצה תלויה ליניארית (כל 3 וקטורים ב $\mathbb{R}^2$ תלויים ליניארית; או $2(1,0) - (2,0) + 0(0,1) = (0,0)$, ולא כל המקדמים 0).

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ המקיימות : $AB=|A|\cdot I$ וכן $\det\left((2A)^2(A^t)^{-1}B\right)=16$; אזי $\det(A)$ שווה ל :

א. 4 .

ב. $\frac{1}{4}$.

ג. $\sqrt[3]{4}$.

ד. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

ה. אין מספיק נתונים כדי לקבוע את $\det(A)$.

<u>פתרון שאלה מספר 6:</u>

מהנתון $\det\left((2A)^2(A^t)^{-1}B\right)=16$ נובע שהדטרמיננטה של A ושל B שונות מ- 0 ולכן המטריצות הפיכות ומתקיים : $\left|4A^2(A^t)^{-1}B\right|=16$ או, לפי חוקי דטרמיננטה נקבל : $4^3\left|A^2\right|\left|(A^t)^{-1}\right|\left|B\right|=16$ או $|A||B|=\frac{1}{4}$. מהנתון $AB=|A|\cdot I$ נקבל ע"י חישוב דטרמיננטה לשני האגפים : $|AB|=\left||A|\cdot I\right|$ או $|A||B|=|A|^3|I|=|A|^3$. לכן, משני החישובים מקבלים $|A|^3=\frac{1}{4}$. אבל A ממשית לכן גם הדטרמיננטה של A ממשית כלומר $|A|=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. סימון נכון : ד'.

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס סדור של V. תהי $S=\{v_1+2v_2\ ,\ -v_1-v_2\}\subset V$, ויהי $[w]_B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. אזי :

א. S לא בסיס של V.

ב. S בסיס סדור של V ומתקיים : $[w]_S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

ג. S בסיס סדור של V ומתקיים : $[w]_S=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

ד. S בסיס סדור של V ומתקיים : $[w]_S=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

ה. S בסיס סדור של V ומתקיים : $[w]_S=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

פתרון שאלה מספר 7:

תחילה נבחין כי S בסיס של V שכן מימד V הוא 2 (נתון בסיס B עם שני איברים) והם בלתי תלויים ליניארית כי הם לא פרופורציונאליים. מכאן כי סעיף א' לא נכון.

עתה, נחשב מטריצות מעבר: מאחר ונתונים איברי S באמצעות איברי B הרי שמטריצת המעבר P מהבסיס B לבסיס S היא: $\underset{B\to S}{P}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ לכן לפי משפט, לכל $w\in V$ מתקיים

$\underset{B\to S}{P}\cdot[w]_S=[w]_B$ מאחר ונתון $[w]_B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, נכפול שני אגפים של המשוואה ב- P^{-1} משמאל ונקבל

$P^{-1}[w]_B=[w]_S$. מתקיים כי $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=[w]_S$.

כמובן כי ניתן לחשב ישירות:

נתון $[w]_B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ולכן $w=1\cdot v_1+3\cdot v_2$. למציאת $[w]_S$, נכתוב את w באמצעות S וניקח את המקדמים:

$$1\cdot v_1+3\cdot v_2=\alpha\left(v_1+2v_2\right)+\beta\left(-v_1-v_2\right)=(\alpha-\beta)\cdot v_1+(2\alpha-\beta)\cdot v_2$$

הוקטורים v_1,v_2 בלתי תלויים ליניארית לכן הקומבינציה יחידה כלומר:

$$\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ 2\alpha-\beta=3\end{cases}\quad -\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ 2\alpha-\beta=3\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=2\\ 2\alpha-\beta=3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$$

$$1\cdot v_1+3\cdot v_2=2\left(v_1+2v_2\right)+1\left(-v_1-v_2\right)\quad\Rightarrow\quad[w]_S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 8: (5 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}^3$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים:

$$T(1,1,0)=(a+2,a+2,a-1)$$
$$T(1,1,1)=(3,3,3)$$
$$T(1,0,1)=(2,0,2)$$

כאשר $a\in\mathbb{R}$. אזי:

א. T לכסין לכל a.

ב. קיימים בדיוק שני ערכים של a עבורם T לכסין.

ג. אם T לכסין אז ל-T יש שלושה ערכים עצמיים שונים.

ד. אם A מייצגת את T לפי בסיס כלשהו ו-T לכסין אז $\det(A)=12$.

ה. אם A מייצגת את T לפי בסיס כלשהו ו-T לכסין אז $trace(A^{-1})=\frac{7}{6}$.

פתרון שאלה מספר 8:

נבנה מטריצה מייצגת לפי הבסיס הנתון (יש לכתוב את התמונות באמצעות הבסיס הנתון). נזכור גם כי T לכסין אם"ם כל מטריצה מייצגת שלו היא לכסינה.

נסמן: $B=\{v_1=(1,1,0)\ ,\ v_2=(1,1,1)\ ,\ v_3=(1,0,1)\}$ בסיס סדור של V, אז:

$$T(v_1)=T(1,1,0)=(a+2,a+2,a-1)=3\cdot v_1+(a-1)v_2+0\cdot v_3$$
$$T(v_2)=T(1,1,1)=(3,3,3)=0\cdot v_1+3v_2+0\cdot v_3$$
$$T(v_3)=T(1,0,1)=(2,0,2)=0\cdot v_1+0\cdot v_2+2v_3$$
$$[T]_B=\begin{pmatrix}3&0&0\\a-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}=A$$

נעבור על כל הסעיפים:

נבדוק מתי המטריצה לכסינה. המטריצה משולשת תחתונה לכן ערכים עצמיים הם איברי האלכסון:

$\lambda_1=2$ מריבוי אלגברי 1 לכן גם ריבוי גיאומטרי 1, וכן $\lambda_2=3$ מריבוי אלגברי 2 לכן נדרוש ריבוי גיאומטרי 2:

$$2=3-rank(A-3I)=3-rank\begin{pmatrix}0&0&0\\a-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$rank\begin{pmatrix}0&0&0\\a-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=1\ \Leftrightarrow\ a=1$$

קיבלנו שהמטריצה לכסינה אם"ם $a=1$ ולכן סעיפים א' ו- ב' לא נכונים. קיבלנו כי לכל a למטריצה יש רק שני ערכים עצמיים שונים ולא 3, לכן גם ג' לא נכון. הדטרמיננטה של A היא $|A|=3\cdot3\cdot2=18\neq12$ לכן ד' לא נכון ובהכרח ה' נכון. ואכן הערכים העצמיים של A^{-1} הם $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ ומתקיים: $trace(A^{-1})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+2+3}{6}=\frac{7}{6}$.

סימון נכון: ה'.